Шәкір Айдос Ғанижанұлы

Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан

e-mail: ajdossakir@gmail.com

1-лекция. Решение системы линейных алгебраических уравнений. Метод Гаусса. Метод Халецкого.

Цель лекции – познакомить студентов с методами решения систем линейных алгебраических уравнений, в частности с методом Гаусса и методом Холецкого, сформировать понимание алгоритмов этих методов, их применения для различных типов матриц, а также развить навыки практического решения СЛАУ с использованием данных методов.

План лекции:

1. Метод Гаусса
2. Метод Халецкого
3. Контрольные вопросы
4. Список литературы

1 Метод Гаусса

Рассмотрим следующую *систему линейных алгебраических уравнений* (СЛАУ). Для простоты рассуждений рассмотрим систему с четырьмя неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b_3, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_4, \end{cases} \tag{1.1}$$

где x_1, x_2, x_3, x_4- неизвестные переменные, $a_{ij}-$ коэффициенты при переменных в уравнениях ($i = 1,2,3,4$ номер уравнения, $j = 1,2,3,4$ номер переменной), b_1, b_2, b_3, b_4-свободные члены (правая часть уравнений).

Первый шаг

Пусть $a_{11} \neq 0$ (ведущий элемент). Разделив все коэффициенты первого уравнения системы (1.1) на a_{11}, получим

$$x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 + \frac{a_{14}}{a_{11}}x_4 = \frac{b_1}{a_{11}}. \tag{1.2}$$

Пользуясь уравнением (1.2), легко исключить из системы (1.1) неизвестную x_1. Для этого достаточно:

1. Умножим уравнение (1.2) на на a_{21}

$$a_{21}x_1 + a_{21}\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + a_{21}\frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 + a_{21}\frac{a_{14}}{a_{11}}x_4 = a_{21}\frac{b_1}{a_{11}}, \tag{1.3}$$

из второго уравнения системы (1.1) вычесть уравнение (1.3)

$$\begin{gathered} a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2 \\ - \\ a_{21}x_1 + \frac{a_{21}\,a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{21}\,a_{13}}{a_{11}}x_3 + \frac{a_{21}\,a_{14}}{a_{11}}x_4 = \frac{a_{21}\,b_1}{a_{11}}, \end{gathered} \tag{1.4}$$

группируем по x_2, x_3, x_4

$$\underbrace{a_{22} - \frac{a_{21}a_{12}}{a_{11}}}_{a_{22}^{(1)}} x_2 + \underbrace{a_{23} - \frac{a_{21}a_{13}}{a_{11}}}_{a_{23}^{(1)}} x_3 + \underbrace{a_{24} - \frac{a_{21}a_{14}}{a_{11}}}_{a_{24}^{(1)}} x_4 = \underbrace{b_2 - \frac{a_{21}b_1}{a_{11}}}_{b_2^{(1)}}. \tag{1.5}$$

2. Умножим уравнение (1.2) на на a_{31}

$$a_{31}x_1 + a_{31}\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + a_{31}\frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 + a_{31}\frac{a_{14}}{a_{11}}x_4 = a_{31}\frac{b_1}{a_{11}}, \tag{1.6}$$

из третьего уравнения системы (1.1) вычесть уравнение (1.6)

$$\begin{gathered} a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b_3 \\ - \\ a_{31}x_1 + \frac{a_{31}\,a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{31}\,a_{13}}{a_{11}}x_3 + \frac{a_{31}\,a_{14}}{a_{11}}x_4 = \frac{a_{31}\,b_1}{a_{11}}, \end{gathered} \tag{1.7}$$

группируем по x_2, x_3, x_4

$$\underbrace{a_{32} - \frac{a_{31}a_{12}}{a_{11}}}_{a_{32}^{(1)}} x_2 + \underbrace{a_{33} - \frac{a_{31}a_{13}}{a_{11}}}_{a_{33}^{(1)}} x_3 + \underbrace{a_{34} - \frac{a_{31}a_{14}}{a_{11}}}_{a_{34}^{(1)}} x_4 = \underbrace{b_3 - \frac{a_{31}b_1}{a_{11}}}_{b_3^{(1)}}. \tag{1.8}$$

3. Умножим уравнение (1.2) на на a_{41}

$$a_{41}x_1 + a_{41}\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + a_{41}\frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 + a_{41}\frac{a_{14}}{a_{11}}x_4 = a_{41}\frac{b_1}{a_{11}}, \tag{1.9}$$

из четвёртого уравнения системы (1.1) вычесть уравнение (1.9)

$$\begin{aligned} & a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_4 \\ & - \\ & a_{41}x_1 + \frac{a_{41}\,a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{41}\,a_{13}}{a_{11}}x_3 + \frac{a_{41}\,a_{14}}{a_{11}}x_4 = \frac{a_{41}\,b_1}{a_{11}}, \end{aligned} \tag{1.10}$$

группируем по x_2, x_3, x_4

$$\underbrace{a_{42} - \frac{a_{41}a_{12}}{a_{11}}}_{a_{42}^{(1)}} x_2 + \underbrace{a_{43} - \frac{a_{41}a_{13}}{a_{11}}}_{a_{43}^{(1)}} x_3 + \underbrace{a_{44} - \frac{a_{41}a_{14}}{a_{11}}}_{a_{44}^{(1)}} x_4 = \underbrace{b_4 - \frac{a_{41}b_1}{a_{11}}}_{b_4^{(1)}}. \tag{1.11}$$

В результате объединения выражений (1.9), (1.8) и (1.11) получаем систему из трёх уравнений

$$\begin{cases} a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + a_{24}^{(1)}x_4 = b_2^{(1)}, \\ a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 + a_{34}^{(1)}x_4 = b_3^{(1)}, \\ a_{42}^{(1)}x_2 + a_{43}^{(1)}x_3 + a_{44}^{(1)}x_4 = b_4^{(1)}. \end{cases} \tag{1.12}$$

Второй шаг

Дальше, разделив далее коэффициенты первого уравнения системы (1.12) на «ведущий элемент» $a_{22}^{(1)}$, получим уравнение

$$x_2 + \frac{a_{23}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}x_3 + \frac{a_{24}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}x_4 = \frac{b_2^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \tag{1.13}$$

Пользуясь уравнением (1.13), легко исключить из системы (1.12) неизвестную x_2. Чтобы добиться этого, достаточно:

1. Умножим уравнение (1.13) на на $a_{32}^{(1)}$

$$a_{32}^{(1)}x_2 + a_{32}^{(1)}\frac{a_{23}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}x_3 + a_{32}^{(1)}\frac{a_{24}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}x_4 = a_{32}^{(1)}\frac{b_2^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}, \tag{1.14}$$

из второго уравнения системы (1.12) вычесть уравнение (1.14)

$$\begin{aligned} & a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 + a_{34}^{(1)}x_4 = b_3^{(1)} \\ & - \\ & a_{32}^{(1)}x_2 + \frac{a_{32}^{(1)}\,a_{23}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}x_3 + \frac{a_{32}^{(1)}\,a_{24}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}x_4 = \frac{a_{32}^{(1)}\,b_2^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}, \end{aligned} \tag{1.15}$$

группируем по x_3, x_4

$$\underbrace{a_{33}^{(1)} - \frac{a_{32}^{(1)}\,a_{23}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}}_{a_{33}^{(2)}} x_3 + \underbrace{a_{34}^{(1)} - \frac{a_{32}^{(1)}\,a_{24}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}}_{a_{34}^{(2)}} x_4 = \underbrace{b_3^{(1)} - \frac{a_{32}^{(1)}\,b_2^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}}_{b_3^{(2)}}. \tag{1.16}$$

2. Умножим уравнение (1.13) на на $a_{42}^{(1)}$

$$a_{42}^{(1)}x_2+a_{42}^{(1)}\frac{a_{23}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}x_3+a_{42}^{(1)}\frac{a_{24}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}x_4=a_{42}^{(1)}\frac{b_2^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}, \tag{1.17}$$

из третьего уравнения системы (1.12) вычесть уравнение (1.17)

$$\begin{array}{l} a_{42}^{(1)}x_2+a_{43}^{(1)}x_3+a_{44}^{(1)}x_4=b_4^{(1)} \\ - \\ a_{42}^{(1)}x_2+\dfrac{a_{42}^{(1)}a_{23}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}x_3+\dfrac{a_{42}^{(1)}a_{24}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}x_4=\dfrac{a_{42}^{(1)}b_2^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}, \end{array} \tag{1.18}$$

группируем по x_3, x_4

$$\underbrace{a_{33}^{(1)}-\frac{a_{32}^{(1)}a_{23}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}}_{a_{33}^{(2)}}x_3+\underbrace{a_{34}^{(1)}-\frac{a_{32}^{(1)}a_{24}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}}_{a_{34}^{(2)}}x_4=\underbrace{b_3^{(1)}-\frac{a_{32}^{(1)}b_2^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}}_{b_3^{(2)}}. \tag{1.19}$$

В результате объединения выражений (1.16) и (1.19) получаем систему из двух уравнений

$$\begin{cases} a_{33}^{(2)}x_3+a_{34}^{(2)}x_4=b_3^{(2)}, \\ a_{43}^{(2)}x_3+a_{44}^{(2)}x_4=b_4^{(2)}. \end{cases} \tag{1.20}$$

Третий шаг

Теперь, разделив далее коэффициенты первого уравнения системы (1.20) на «ведущий элемент» $a_{33}^{(2)}$, получим уравнение

$$x_3+\frac{a_{34}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}}x_4=\frac{b_3^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} \tag{1.21}$$

Пользуясь уравнением (1.21), легко исключить из системы (1.20) неизвестную x_3. Для выполнения этого умножим уравнение (1.20) на на $a_{33}^{(2)}$

$$a_{33}^{(2)}x_3+a_{33}^{(2)}\frac{a_{34}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}}x_4=a_{33}^{(2)}\frac{b_3^{(2)}}{a_{33}^{(2)}}, \tag{1.22}$$

из второго уравнения системы (1.20) вычесть уравнение (1.22)

$$\begin{array}{l} a_{43}^{(2)}x_3+a_{44}^{(2)}x_4=b_4^{(2)} \\ - \\ a_{33}^{(2)}x_3+\dfrac{a_{33}^{(2)}a_{34}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}}x_4=\dfrac{a_{33}^{(2)}b_3^{(2)}}{a_{33}^{(2)}}, \end{array} \tag{1.23}$$

группируем по x_4

$$\underbrace{a_{44}^{(2)}-\frac{a_{33}^{(2)}a_{34}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}}}_{a_{44}^{(3)}}x_4=\underbrace{b_4^{(2)}-\frac{a_{33}^{(2)}b_3^{(2)}}{a_{33}^{(2)}}}_{b_4^{(3)}}. \tag{1.24}$$

В результате получим следующее уравнение

$$a_{44}^{(3)} x_4 = b_4^{(3)}. \tag{1.25}$$

Четвёртый шаг

Отсюда следует, что

$$x_4 = \frac{b_4^{(3)}}{a_{44}^{(3)}}. \tag{1.26}$$

С помощью выражений (1.21) и (1.26) находим неизвестное x_3

$$x_3 = \frac{b_3^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} - \frac{a_{34}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} \cdot \frac{b_4^{(3)}}{a_{44}^{(3)}}. \tag{1.27}$$

Далее с помощью выражений (1.13), (1.26) и (1.27) находим неизвестное x_2

$$x_2 = \frac{b_2^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} - \frac{a_{23}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \left(\frac{b_3^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} - \frac{a_{34}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} \cdot \frac{b_4^{(3)}}{a_{44}^{(3)}} \right) - \frac{a_{24}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \cdot \frac{b_4^{(3)}}{a_{44}^{(3)}}. \tag{1.28}$$

В заключение, используя формулы (1.2), (1.26), (1.27) и (1.28), определяем неизвестное x_1

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}} \left[\frac{b_2^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} - \frac{a_{23}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \left(\frac{b_3^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} - \frac{a_{34}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} \cdot \frac{b_4^{(3)}}{a_{44}^{(3)}} \right) - \frac{a_{24}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \cdot \frac{b_4^{(3)}}{a_{44}^{(3)}} \right] - \frac{a_{13}}{a_{11}} \left[\frac{b_3^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} - \frac{a_{34}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} \cdot \frac{b_4^{(3)}}{a_{44}^{(3)}} \right] - \frac{a_{14}}{a_{11}} \cdot \frac{b_4^{(3)}}{a_{44}^{(3)}}. \tag{1.29}$$

Следовательно, как видно из выражений (1.26), (1.27), (1.28) и (1.29), мы нашли решения системы линейных алгебраических уравнений (1.1).

Примечание. Метод Гаусса — один из классических алгоритмов решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Суть метода заключается в последовательном преобразовании системы к верхнетреугольному виду с последующим обратным ходом для нахождения всех неизвестных. Этот метод широко применяется благодаря своей универсальности и простоте алгоритма. Он подходит для систем любого размера, при условии, что определитель матрицы коэффициентов не равен нулю, и позволяет получить точное решение в случае СЛАУ с точными коэффициентами. К преимуществам метода Гаусса можно отнести универсальность, ясный пошаговый алгоритм, который легко реализуется на компьютере, и возможность точного решения для систем с точными данными. Однако метод имеет и недостатки. Он чувствителен к ошибкам округления при работе с числами с плавающей запятой, обладает высокой вычислительной сложностью для больших систем (примерно $O(n^3)$) и требует перестановки строк (частичный или полный выбор главного элемента) для устойчивости, что усложняет реализацию.

2 Метод Халецкого

Для удобства рассуждений истему линейных уравнений (1.1) запишем в матричном виде

$$\mathcal{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \tag{2.1}$$

где

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

Представим матрицу A в виде произведения нижней треугольной матрицы

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & 0 \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

и верхней треугольной матрицы

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 1 & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ 0 & 1 & c_{23} & c_{24} \\ 0 & 0 & 1 & c_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

с единичной диагональю, т. е.

$$\mathcal{A} = \mathcal{B}\mathcal{C}. \tag{2.5}$$

Тогда элементы матриц $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ определяются следующими формулами

$$\begin{cases} \mathbf{b}_{11} = a_{11},\ \mathbf{b}_{12} = 0,\ \mathbf{b}_{13} = 0,\ \mathbf{b}_{14} = 0 \\ \mathbf{b}_{21} = a_{21},\ \mathbf{b}_{22} = a_{22} - b_{21}c_{12},\ \mathbf{b}_{23} = 0,\ \mathbf{b}_{24} = 0 \\ \mathbf{b}_{31} = a_{31},\ \mathbf{b}_{32} = a_{32} - b_{31}c_{12},\ \mathbf{b}_{33} = a_{33} - b_{31}c_{13} - b_{32}c_{23},\ \mathbf{b}_{34} = 0 \\ \mathbf{b}_{41} = a_{41},\ \mathbf{b}_{42} = a_{42} - b_{41}c_{12},\ \mathbf{b}_{43} = a_{43} - b_{41}c_{13} - b_{42}c_{23},\ \mathbf{b}_{44} = a_{44} - b_{41}c_{14} - b_{42}c_{24} - b_{43}c_{34} \end{cases} \tag{2.6}$$

и

$$\begin{cases} \mathbf{c}_{11} = 1,\ \mathbf{c}_{12} = \dfrac{a_{12}}{b_{11}},\ \mathbf{c}_{13} = \dfrac{a_{13}}{b_{11}},\ \mathbf{c}_{14} = \dfrac{a_{14}}{b_{11}} \\ \mathbf{c}_{22} = 1,\ \mathbf{c}_{23} = \dfrac{a_{23} - b_{21}c_{13}}{b_{22}},\ \mathbf{c}_{24} = \dfrac{a_{24} - b_{21}c_{14}}{b_{22}} \\ \mathbf{c}_{33} = 1,\ \mathbf{c}_{34} = \dfrac{a_{34} - b_{31}c_{14} - b_{32}c_{24}}{b_{33}} \\ \mathbf{c}_{44} = 1 \end{cases}. \tag{2.7}$$

Отсюда искомый вектор $\mathbf{x}$ может быть вычислен из цепи уравнений

$$\mathcal{B}\mathbf{y} = \mathbf{b}, \quad \mathcal{C}\mathbf{x} = \mathbf{y}, \tag{2.8}$$

где

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

Тогда как матрицы $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ треугольные, то системы (2.8) легко решаются, а именно

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{b_1}{b_{11}}, \\ y_2 &= \frac{b_2 - b_{21}y_1}{b_{22}}, \\ y_3 &= \frac{b_3 - b_{31}y_1 - b_{32}y_2}{b_{33}}, \\ y_4 &= \frac{b_4 - b_{41}y_1 - b_{42}y_2 - b_{43}y_3}{b_{44}}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

и

$$\begin{aligned} x_4 &= y_4, \\ x_3 &= y_3 - c_{34}x_4, \\ x_2 &= y_2 - c_{23}x_3 - c_{24}x_4, \\ x_1 &= y_1 - c_{12}x_2 - c_{13}x_3 - c_{14}x_4. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Из формул (2.9) видно, что числа $y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4$ выгодно вычислять вместе с элементами матрицы $\mathcal{C}$.

Примечание. Метод Халецкого не использует выбор ведущего элемента, так как применяется только к симметричным положительно определённым матрицам. В отличие от LU-разложения с выбором ведущего элемента, метод Холецкого не требует перестановки строк.

3 Контрольные вопросы

1. В чём основные различия между методом Гаусса и Халецкого?
2. Какой метод требует меньше арифметических операций?
3. В каком случае метод Гаусса является более универсальным?
4. Для каких матриц применим метод Халецкого?
5. В чём заключается разложение Халецкого $\mathcal{A} = \mathcal{B}\mathcal{C}$?

4 Список литературы

Для получения дополнительных и более полных сведений студентам рекомендуется обратиться к литературе [1–7].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Копченова, Н. В., и И. А. Марон. *Вычислительная математика в примерах и задачах: Учебное пособие*. Санкт-Петербург: Издательство «Лань», 2019.

[2] Самарский, А. А., и А. В. Гулин. *Численные методы: Учебное пособие для вузов*. Москва: Наука, 1989.

[3] Киреев, В. И., и А. В. Пантелеев. *Численные методы в примерах и задачах: Учебное пособие*. Санкт-Петербург: Издательство «Лань», 2015.

[4] Kiusalaas, Jaan. *Numerical Methods in Engineering with Python*. Cambridge: Cambridge University Press, 2013.

[5] Демидович, Б. П., и И. А. Марон. *Основы вычислительной математики: Учебное пособие*. 8-е изд. Санкт-Петербург: Лань, 2022.

[6] Шакенов, Қ. Қ. *Есептеу математикасы әдістері: лекциялар курсы*. Алматы: 2019.

[7] Сұлтанғазин, Ө. М., және С. Атанбаев. *Есептеу әдістерінің қысқаша теориясы*. Алматы: Білім, 2016.